Εισαγωγή στην Τοπολογία, 14/6/2019, Α. Τόλιας

Θέμα 1. (1,5 μον.)

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Ορίζουμε $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με $d(x,y) = \Big(\rho(x,y)\Big)^{\frac{1}{2}}$ για κάθε $x, y \in X$. Να δειχθεί ότι η d είναι επίσης μετρική στο X. Είναι οι μετρικές ρ και d ισοδύναμες;

Θέμα 2. (2 μον.)

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.

α) Για $A \subseteq X$ να δοθεί ο ορισμός της κλειστής θήκης $\overline{A}$ του A και του εσωτερικού A^o του A.

β) Να δειχθεί ότι αν $A, B \subseteq X$ τότε $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ και $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$.

γ) Να δειχθεί, παραθέτοντας κατάλληλα αντιπαραδείγματα στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, ότι δεν ισχύει εν γένει ότι $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ και $(A \cup B)^o = A^o \cup B^o$.

Θέμα 3. (2 μον.)

α) Αν (X,ρ) μετρικός χώρος και $F \subseteq X$, ώστε για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο F και κάθε $x \in X$ αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε $x \in F$, να δείξετε ότι το σύνολο F είναι κλειστό.

β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = f(x)\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Θέμα 4. (2 μον.)

α) Να δείξετε ότι ένας μετρικός χώρος (X,ρ) είναι μη συνεκτικός αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $f : X \to \{0,1\}$ συνεχής και επί.

β) Αν (X,ρ) είναι συνεκτικός μετρικός χώρος, (Y,d) ένας μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση συνεχής και επί να δείξετε ότι ο μετρικός χώρος (Y,d) είναι επίσης συνεκτικός.

Θέμα 5. (2 μον.)

α) Να δώσετε τον ορισμό του συμπαγούς υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου και να δείξετε ότι αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ) και $a \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} a$ τότε το σύνολο $A = \{a\} \cup \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές.

β) Αν $f : (X,\rho) \to (Y,d)$ είναι μια συνάρτηση, πότε η f καλείται ομοιόμορφα συνεχής; Να διατυπώσετε το Λήμμα του Lebesgue και να το χρησιμοποιήσετε για να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : (X,\rho) \to (Y,d)$ είναι συνεχής και ο χώρος (X,ρ) είναι συμπαγής τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέμα 6. (1,5 μον.)

Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τη συνήθη μετρική. Να δοθούν υποσύνολα A, B, Γ, Δ του $\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

α) A συμπαγές και συνεκτικό. β) B συμπαγές μη συνεκτικό με $\mathrm{diam}(B) = 2$ και $\mathrm{diam}(B^o) = 1$. γ) Γ μη συμπαγές και συνεκτικό. δ) Δ μη συμπαγές μη συνεκτικό με $\mathrm{diam}(\Delta) = 2$ και $\mathrm{diam}(\Delta^o) = 1$.

Καλή Επιτυχία!